Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2019 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2029-2016\cdot 2032}$. **Ответ:** 6

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2031-2017\cdot 2033}$. **Ответ:** 5

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2009-2007\cdot 2021}$. **Ответ:** 4

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019\cdot 2007-2006\cdot 2020}$. **Ответ:** 3

Задача 2.

Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+2b=3$, $b+2c=4$, $c+2a=5$. **Ответ:** 4

Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=2$, $b+3c=4$, $c+3a=6$. **Ответ:** 3

Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+2b=4$, $b+2c=5$, $c+2a=6$. **Ответ:** 5

Найдите $a+b+c$, если известно, что $a+3b=1$, $b+3c=2$, $c+3a=5$. **Ответ:** 2

Задача 3.

Решите уравнение $7\sin x+2\cos 2x=5$. **Ответ:** $x=\pi/2+2k\pi,\ (-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $5\sin x+3\cos 2x=4$. **Ответ:** $x=(-1)^k\pi/6+k\pi,\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $7\sin x+4\cos 2x=3$. **Ответ:** $x=\pi/2+2k\pi,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{8}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $5\sin x+7\cos 2x=6$. **Ответ:** $x=(-1)^k\pi/6+k\pi,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{7}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите неравенство $2^{\log_2^2 x}+7x^{\log_2 x}<16$. **Ответ:** $\frac{1}{2}<x<2$

Решите неравенство $3^{\log_3^2 x}+5x^{\log_3 x}<18$. **Ответ:** $\frac{1}{3}<x<3$

Решите неравенство $7^{\log_7^2 x}+2x^{\log_7 x}<21$. **Ответ:** $\frac{1}{7}<x<7$

Решите неравенство $5^{\log_5^2 x}+3x^{\log_5 x}<20$. **Ответ:** $\frac{1}{5}<x<5$

Задача 5.

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 4$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 5/3.

Ответ: 9

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 5$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 30, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 2.

Ответ: 12

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 6$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 42, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 5/2.

Ответ: 14

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 7$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 56, а тангенс угла $\angle DCE$ равен 3.

Ответ: 16

Задача 6.

Найдите все пары вещественных чисел (a, b), при которых неравенство

$$2a(x+2)^4 + 9b(x-2)^4 \geqslant x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x. **Ответ:** $a \geqslant \frac{1}{4}$, $b \geqslant \frac{1}{18}$

Найдите все пары вещественных чисел (a, b), при которых неравенство

$$3a(x+3)^4 + 8b(x-3)^4 \geqslant x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x. **Ответ:** $a \geqslant \frac{1}{6}$, $b \geqslant \frac{1}{16}$

Найдите все пары вещественных чисел (a, b), при которых неравенство

$$4a(x+2)^4 + 7b(x-2)^4 \leqslant x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x. **Ответ:** $a \leqslant \frac{1}{8}$, $b \leqslant \frac{1}{14}$

Найдите все пары вещественных чисел (a, b), при которых неравенство

$$5a(x+3)^4 + 6b(x-3)^4 \leqslant x^4 + 54x^2 + 81$$

справедливо для всех вещественных x. **Ответ:** $a \leqslant \frac{1}{10}$, $b \leqslant \frac{1}{12}$

Задача 7.

Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, $\sqrt{2}$, 2. **Ответ:** $9:5$

Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, 2, 4. **Ответ:** $25:17$

Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, $\sqrt{3}$, 3. **Ответ:** $8:5$

Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, $\sqrt{5}$, 5. **Ответ:** $18:13$

Задача 8.

Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 10\sqrt{6}\sin x + 5\sin y + 4\sqrt{3}\sin\frac{x+y}{2} = 6\sqrt{6} \\ 5\sin x\sin y + 4\sqrt{3}\sin x\sin\frac{x+y}{2} + \sqrt{2}\sin y\sin\frac{x+y}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{5} \end{cases}.$$

Ответ: $(x,y) = \left(\arcsin\frac{1}{5}, \arccos\frac{1}{5}\right)$, $(x,y) = \left(\pi - \arcsin\frac{1}{5}, \pi - \arccos\frac{1}{5}\right)$

Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 28\sqrt{3}\cos x + 7\cos y + 4\sqrt{6}\cos\frac{x+y}{2} = 12\sqrt{3} \\ 7\cos x\cos y + 4\sqrt{6}\cos x\cos\frac{x+y}{2} + \sqrt{2}\cos y\cos\frac{x+y}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{7} \end{cases}.$$

Ответ: $(x,y) = \left(\arccos\frac{1}{7}, \arcsin\frac{1}{7}\right)$, $(x,y) = \left(-\arccos\frac{1}{7}, -\arcsin\frac{1}{7}\right)$

Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 24\sqrt{7}\sin x + 8\sin y + 3\sqrt{14}\sin\frac{x+y}{2} = 9\sqrt{7} \\ 8\sin x\sin y + 3\sqrt{14}\sin x\sin\frac{x+y}{2} + \sqrt{2}\sin y\sin\frac{x+y}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{8} \end{cases}.$$

Ответ: $(x,y) = \left(\arcsin\frac{1}{8}, \arccos\frac{1}{8}\right)$, $(x,y) = \left(\pi - \arcsin\frac{1}{8}, \pi - \arccos\frac{1}{8}\right)$

Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 36\sqrt{5}\cos x + 9\cos y + 4\sqrt{10}\cos\frac{x+y}{2} = 12\sqrt{5} \\ 9\cos x\cos y + 4\sqrt{10}\cos x\cos\frac{x+y}{2} + \sqrt{2}\cos y\cos\frac{x+y}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \end{cases}.$$

Ответ: $(x,y) = \left(\arccos\frac{1}{9}, \arcsin\frac{1}{9}\right)$, $(x,y) = \left(-\arccos\frac{1}{9}, -\arcsin\frac{1}{9}\right)$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}$.

Решение: $\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032} = \sqrt{(2024^2 - 5^2) - (2024^2 - 8^2)} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$. Остаётся заметить, что $6^2 < 39 < 7^2$.

Ответ: 6

2. Найдите $a + b + c$, если известно, что $a + 2b = 3$, $b + 2c = 4$, $c + 2a = 5$.

Решение: $a + b + c = \frac{1}{3}\big((a + 2b) + (b + 2c) + (c + 2a)\big) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Ответ: 4

3. Решите уравнение $7 \sin x + 2 \cos 2x = 5$.

Решение:

$$7 \sin x + 2 \cos 2x = 5 \iff 7 \sin x + 2 - 4 \sin^2 x = 5 \iff 4 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0 \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + 2k\pi, \\ x = (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + k\pi, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi/2 + 2k\pi,\ (-1)^k \arcsin \frac{3}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16$.

Решение:

$$2^{\log_2^2 x} + 7x^{\log_2 x} < 16 \iff 2^{\log_2^2 x} + 7 \cdot 2^{\log_2^2 x} < 16 \iff 2^{\log_2^2 x} < 2 \iff$$
$$\iff \log_2^2 x < 1 \iff -1 < \log_2 x < 1 \iff \tfrac{1}{2} < x < 2.$$

Ответ: $\frac{1}{2} < x < 2$

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E таким образом, что $AD : DB = BE : EA = 1 : 4$. Найдите AB, если известно, что площадь треугольника ABC равна 18, а тангенс угла $\angle DCE$ равен $5/3$.

Решение: Положим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Опустим из точек D и E на сторону AC перпендикуляры DK и EL соответственно. Пусть $AD : DB = BE : EA = 1 : n$ (по условию $n = 4$). Тогда

$$\operatorname{tg} \angle ACE = \frac{EL}{CL} = \frac{\frac{n}{n+1}a}{\frac{1}{n+1}b} = \frac{na}{b}, \quad \operatorname{tg} \angle ACD = \frac{DK}{CK} = \frac{\frac{1}{n+1}a}{\frac{n}{n+1}b} = \frac{a}{nb}.$$

Стало быть,

$$\operatorname{tg}\angle DCE=\operatorname{tg}(\angle ACE-\angle ACD)=\frac{\frac{na}{b}-\frac{a}{nb}}{1+\frac{na}{b}\cdot\frac{a}{nb}}=\frac{n^2-1}{n}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{n^2-1}{n}\cdot\frac{2S(\triangle ABC)}{c^2},$$

откуда $c=\sqrt{\dfrac{n^2-1}{n}\cdot\dfrac{2S(\triangle ABC)}{\operatorname{tg}\angle DCE}}=\sqrt{\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{36}{5/3}}=9.$

Ответ: 9

6. Найдите все пары вещественных чисел (a,b), при которых неравенство

$$2a(x+2)^4+9b(x-2)^4\geqslant x^4+24x^2+16$$

справедливо для всех вещественных x.

Решение: Заметим, что $(x+2)^4+(x-2)^4=2(x^4+24x^2+16)$. Стало быть, исходное неравенство можно переписать как

$$\left(2a-\tfrac{1}{2}\right)(x+2)^4+\left(9b-\tfrac{1}{2}\right)(x-2)^4\geqslant 0.$$

Подставляя $x=2$ и $x=-2$, получаем $2a-\frac{1}{2}\geqslant 0$ и $9b-\frac{1}{2}\geqslant 0$. Остаётся заметить, что при выполнении этих ограничений наше неравенство выполняется для всех x. Следовательно, искомые значения параметров a и b описываются неравенствами $a\geqslant\frac{1}{4}$, $b\geqslant\frac{1}{18}$.

Ответ: $a\geqslant\frac{1}{4}$, $b\geqslant\frac{1}{18}$

7. Плоскость π проходит через три вершины прямоугольного параллелепипеда, отсекая от него тетраэдр. Два шара максимально возможных радиусов находятся внутри сферы, описанной около этого параллелепипеда, по разные стороны от плоскости π. Найдите отношение радиусов этих шаров, если известно, что рёбра параллелепипеда равны 1, $\sqrt{2}$, 2.

Решение: Пусть π_1 и π_2 — две касательные плоскости к сфере, параллельные π, и пусть T_1 и T_2 — соответствующие точки касания. Тогда центр сферы O совпадает с серединой отрезка T_1T_2. Пусть T — точка пересечения T_1T_2 с плоскостью π. Пусть $\mathcal{B}_1$ — шар, находящийся между π_1 и π, а $\mathcal{B}_2$ — шар, находящийся между π_2 и π. Тогда диаметры $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ не могут превышать расстояния между π_1 и π и между π_2 и π соответственно. Причём равенство достигается ровно в одном случае — когда отрезки TT_1 и TT_2 суть соответственно диаметры $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Следовательно, искомое отношение равно TT_1/TT_2. Не ограничивая общности, можно считать, что $TT_1\geqslant TT_2$. Тогда, если обозначить через R радиус сферы и через r — расстояние от точки O до плоскости π, то

$$\frac{TT_1}{TT_2}=\frac{R+r}{R-r}=\frac{R/r+1}{R/r-1}.$$

Найдём R/r.

Пусть A, B, C — вершины параллелепипеда, через которые проходит плоскость π, и пусть D — четвёртая вершина отсекаемого тетраэдра. Пусть $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$. Поскольку плоскость π делит диагональ параллелепипеда, исходящую из вершины D, в отношении $1:2$, расстояние от O до π в два раза меньше расстояния от D до π. Стало быть, объём тетраэдра $ABCD$ равен одновременно $\frac{1}{3}\cdot 2r\cdot S(\triangle ABC)$ и $\frac{1}{6}abc$. Для площади $S(\triangle ABC)$ справедливо

$$S(\triangle ABC)=\sqrt{S(\triangle ABD)^2+S(\triangle BCD)^2+S(\triangle ACD)^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}\left((ab)^2+(bc)^2+(ac)^2\right)},$$

то есть

$$r=\frac{abc}{4S(\triangle ABC)}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

Учитывая, что $R = OD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, получаем

$$R/r = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{c^2}} = \sqrt{1+2+4} \cdot \sqrt{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = 7/2.$$

Стало быть, искомое отношение равно

$$\frac{TT_1}{TT_2} = \frac{7/2+1}{7/2-1} = 9/5.$$

Ответ: $9:5$

8. Найдите все x, y из интервала $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 10\sqrt{6}\sin x + 5\sin y + 4\sqrt{3}\sin\frac{x+y}{2} = 6\sqrt{6} \\ 5\sin x \sin y + 4\sqrt{3}\sin x \sin\frac{x+y}{2} + \sqrt{2}\sin y \sin\frac{x+y}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{5} \end{cases}.$$

Решение: Положим $a = 5\sin x$, $b = \frac{5}{2\sqrt{6}}\sin y$, $c = \sqrt{2}\sin\frac{x+y}{2}$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ ab+ac+bc = 3 \end{cases}.$$

Тогда $2(a+b+c)^2 - 6(ab+ac+bc) = 0$. Но $2(a+b+c)^2 - 6(ab+ac+bc) = (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$. Следовательно, $a = b = c = 1$. Получаем

$$\sin x = \tfrac{1}{5}, \quad \sin y = \tfrac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \sin\tfrac{x+y}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{5} = \arccos\frac{1}{5}$. Стало быть,

$$x \in \left\{\arcsin\tfrac{1}{5}, \pi - \arcsin\tfrac{1}{5}\right\}, \quad y \in \left\{\arccos\tfrac{1}{5}, \pi - \arccos\tfrac{1}{5}\right\}, \quad \tfrac{x+y}{2} \in \{\pi/4, 3\pi/4,\}.$$

Данным трём условиям удовлетворяют только пары

$$(x,y) = \left(\arcsin\tfrac{1}{5}, \arccos\tfrac{1}{5}\right) \quad \text{и} \quad (x,y) = \left(\pi - \arcsin\tfrac{1}{5}, \pi - \arccos\tfrac{1}{5}\right).$$

Ответ: $(x,y) = \left(\arcsin\frac{1}{5}, \arccos\frac{1}{5}\right)$, $(x,y) = \left(\pi - \arcsin\frac{1}{5}, \pi - \arccos\frac{1}{5}\right)$