Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2015 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

Ответ: 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{12}$.

Ответ: 3

Найдите $f(5)$, если $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{15}$.

Ответ: 2

Найдите $f(3)$, если $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{21}$.

Ответ: 1

Задача 2.

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Ответ: 39

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 9x - 2 = 0$.

Ответ: 85

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 8x - 3 = 0$.

Ответ: 70

Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 10x + 4 = 0$.

Ответ: 92

Задача 3.

Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x + \cos x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{13\pi}{12} + 2n\pi, -\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{2}\cos 2x + \sin x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{17\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{12} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{12} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите уравнение $\log_x |2x^2-3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |4x-1| = 4\log_{|4x-1|} \sqrt{x+1}$.

Ответ: $x = -\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Решите уравнение $\log_x |3x^2-4| = 4\log_{|3x^2-4|} x$.

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2},\ \sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$

Решите уравнение $\log_{\sqrt{x+1}} |5x-1| = 4\log_{|5x-1|} \sqrt{x+1}$.

Ответ: $x = -\frac{4}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{-2+\sqrt{14}}{5}$

Задача 5.

Окружность радиуса 3/2 касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность радиуса 2 касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться AB, если $\angle ABC = 45°$?

Ответ: $3 \pm \sqrt{7}$

Окружность касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle BAC = 30°$ и $AC = 2/3$?

Ответ: $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

Окружность касается середины стороны AC треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L, так что $BK = KL = LC$. Чему может равняться радиус окружности, если $\angle ABC = 45°$ и $AB = 1$?

Ответ: $3 \pm \sqrt{7}$

Задача 6.

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Ответ: 1 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав две трети пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий и, проехав 800 метров, встретил Григория. Найдите длину трассы, если известно, что Василий закончил спуск ровно тогда, когда Григорий добрался до вершины горы. Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

Ответ: 2 км

Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав четверть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий и, проехав 4 км, встретил Василия. Найдите расстояние между пунктами А и Б, если известно, что Василий добрался до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б. Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Ответ: 20 км

Лыжник Григорий ехал по довольно пологому склону, но, проехав три четверти пути, проявил неуклюжесть и сломал лыжи. Отбросив их за ненадобностью, он тут же побрёл обратно. В момент поломки с вершины горы стартовал лыжник Василий. На каком расстоянии от вершины он встретит Григория, если длина трассы равна 2100 метров, а Василий закончит спуск ровно тогда, когда Григорий доберётся до вершины горы? Скорости лыжников и пешехода считать постоянными.

Ответ: 900 м

Задача 7.

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

Ответ: 13/6

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{21}$. Найдите расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

Ответ: 15/2

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера радиуса $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между прямыми AE и BD, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

Ответ: 6

В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми $A'K$ и $B'L$ равно $\sqrt{21}$, где K и L — точки, лежащие на AB и BC соответственно, и $AK : KB = BL : LC = 2 : 3$.

Ответ: 14/5

Задача 8.

Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\sin\alpha}{2+\cos 2\alpha} + \frac{2+\cos 2\alpha}{\beta^2+\beta+1} + \frac{\beta^2+\beta+1}{\sqrt{\beta}+1} + \frac{\sqrt{\beta}+1}{4-3\sin\alpha}.$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0$

Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\cos x}{2-\cos 2x} + \frac{2-\cos 2x}{(y^2+1)^2} + \frac{(y^2+1)^2}{|y|+1} + \frac{|y|+1}{2-\cos x}.$$

Ответ: $x = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ y = 0$

Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4-3\cos\alpha}{2-\cos 2\alpha}+\frac{2-\cos 2\alpha}{2\beta^4+\beta^2+1}+\frac{2\beta^4+\beta^2+1}{|\beta|+1}+\frac{|\beta|+1}{4-3\cos\alpha}.$$

Ответ: $\alpha = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ \beta = 0$

Найдите все пары (x, y), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{2-\sin x}{2+\cos 2x}+\frac{2+\cos 2x}{(y+1)^2}+\frac{(y+1)^2}{2\sqrt{y}+1}+\frac{2\sqrt{y}+1}{2-\sin x}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}),\ y = 0$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Найдите $f(2)$, если $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{10}$.

Решение: $f(2) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{10} = 2$.

Ответ: 2

2. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 - 7x + 5 = 0$.

Решение: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 49 - 10 = 39$. Можно и в явном виде найти корни, возвести в квадрат и сложить.

Ответ: 39

3. Решите неравенство $\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x \geqslant 0$.

Решение: Преобразуем левую часть:

$$\cos x + \sqrt{2}\cos 2x - \sin x = \\ = (\cos x - \sin x)(1 + \sqrt{2}(\cos x + \sin x)) = \\ = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{1}{2}\right).$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.,$$

которая равносильна соотношению $x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

4. Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2-3|} x$.

Решение: ОДЗ для x: $x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}}$. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \left[\begin{array}{l} |2x^2 - 3| = x^2 \\ |2x^2 - 3| = x^{-2} \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ 2x^4 - 3x^2 - 1 = 0 \\ 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3 + \sqrt{17}}}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2}$

5. Окружность радиуса $3/2$ касается середины стороны BC треугольника ABC и пересекает сторону AB в точках D и E, так что $AD : DE : EB = 1 : 2 : 1$. Чему может равняться AC, если $\angle BAC = 30°$?

Решение: Обозначим окружность из условия через Ω. Положим $b = AC$, $\gamma = \angle ACB$, $\alpha = \angle BAC (= 30°)$, $k = DE/EB (= 2)$.

Центр Ω равноудалён от точек A, B, C, следовательно он совпадает с центром описанной около треугольника ABC окружности. Пусть F — середина отрезка BC, а O — центр Ω. Тогда $OF = r$ — радиус Ω, $OB = R$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle OFB = 90°$, $\angle BOF = \alpha$. Стало быть, по теореме синусов

$$b = 2R\sin(\alpha+\gamma) = \frac{2r}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\gamma) = 2r(\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma + \sin\gamma).$$

По той же теореме синусов и по теореме о касательной и секущей

$$\sin\gamma = \frac{AB}{BC}\sin\alpha = \frac{k+2}{2}\cdot\frac{BE}{BF}\sin\alpha = \frac{k+2}{2\sqrt{k+1}}\sqrt{\frac{BE\cdot BD}{BF^2}}\sin\alpha = \frac{k+2}{2\sqrt{k+1}}\sin\alpha,$$

то есть для $k=2$, $\alpha = 30°$

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

и

$$\frac{b}{r} = \frac{2(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})}{3}.$$

Оба значения $\cos\gamma$ достигаются и определяются тем, находятся точки A и C по одну сторону от прямой BO или нет.

Ответ: $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$

6. Велосипедист Василий выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадёжно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошёл пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберётся до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

Решение: Обозначим через t_1 время от момента поломки до момента встречи и через t_2 время от момента встречи до окончания движения. Обозначим также через S_1 расстояние от места поломки до места встречи, через S_2 — расстояние от места встречи до пункта А, а через S — расстояние между А и Б (по условию $S=4$). Тогда

$$\frac{S-S_2}{S_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Но, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, откуда, учитывая условие, получаем, что

$$\frac{S-S_2}{S_2} = \frac{S}{S_1+S_2} = 3.$$

Стало быть, искомое расстояние равно $S_2 = S/4 = 1$.

Ответ: 1 км

7. В правильную треугольную призму с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D — точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1:2$.

Решение: Пусть $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : k$ (по условию $k=2$). Обозначим через d расстояние между AE и BD (по условию $d = \sqrt{13}$). Обозначим также через F и F' середины рёбер AC и $A'C'$ соответственно. Опустим из точек E и D перпендикуляры EE' и DD' на ребро $A'C'$. По теореме Фалеса $A'E' : E'F' = F'D' : D'C' = 1 : k$. Следовательно, $E'D' = A'F' = AF$, то есть прямые AE' и FD' параллельны. Поскольку прямые EE' и DD' также параллельны, получаем, что плоскости $\alpha = AEE'$ и $\beta = BDD'F$ параллельны. Стало быть, расстояние между прямыми AE и BD равно расстоянию между плоскостями α и β. Но поскольку F — середина AC, расстояние между α и β равно расстоянию от C до β. Заметим, что перпендикуляр, опущенный из C на FD', по теореме о трёх перпендикулярах перпендикулярен BF. Стало быть, он перпендикулярен и всей плоскости β, то есть его длина равна d.

Рассмотрим треугольник FCK, где K — точка пересечения прямых CC' и FD'. Это прямоугольный треугольник с прямым углом C. При этом, если r — искомый радиус, то

$$FC = r\sqrt{3}, \; CK = (k+1)CC' = 2(k+1)r,$$

откуда

$$d = \frac{FC \cdot CK}{\sqrt{FC^2 + CK^2}} = r \cdot \frac{2\sqrt{3}(k+1)}{\sqrt{3 + 4(k+1)^2}} = r \cdot \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Учитывая, что $d = \sqrt{13}$, получаем, что $r = 13/6$.

Ответ: 13/6

8. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

Решение: Заметим, что все числители и знаменатели положительны. Заметим также, что для любых положительных a, b, c, d справедливо

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 2\sqrt{\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}} \geqslant 4\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}}} = 4,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$a = b = c = d.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4 - 3\sin\alpha = 2 + \cos 2\alpha \\ 4 - 3\sin\alpha = \sqrt{\beta} + 1 \\ \beta^2 + \beta + 1 = \sqrt{\beta} + 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение из (??) переписывается как

$$2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 1 = 0,$$

откуда либо $\sin\alpha = 1$, либо $\sin\alpha = 1/2$. При этих значениях α выражение $4 - 3\sin\alpha$ равно соответственно 1 и 5/2.

Второе уравнение из (??) переписывается как

$$\sqrt{\beta}\left(\sqrt{\beta}^3 + \sqrt{\beta} - 1\right) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $\beta = 0$ и $\beta = \varkappa$, $0 < \varkappa < 1$. При этих значениях β выражение $\sqrt{\beta} + 1$ либо равно 1, либо заключено строго между 1 и 2.

Стало быть, ввиду второго уравнения из (??) имеем

$$\sin\alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \; (n \in \mathbb{Z}), \; \beta = 0$