Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

Ответ: 4

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Ответ: 1

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\left(8-4\sqrt{2}\right)$.

Ответ: 8

Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$.

Ответ: 3

Задача 2.

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

Ответ: -3

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+4x+31)$.

Ответ: -3

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-8x+20)$.

Ответ: -2

Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2+10x+34)$.

Ответ: -2

Задача 3.

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7}>x^{12}$.

Ответ: $x\in(0,1)\cup(\frac{5}{3},+\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3}<x^{-7}$.

Ответ: $x\in(0,\frac{4}{5})\cup(1,+\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{4x-5}>x^{-2}$.

Ответ: $x\in(0,\frac{3}{4})\cup(1,+\infty)$

Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{-7x+5}<x^{-4}$.

Ответ: $x\in(0,1)\cup(\frac{9}{7},+\infty)$

Задача 4.

Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$.

Ответ: $x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2}\,|\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

Ответ: $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24}\right) + \frac{1}{4} = 0$.

Ответ: $x = \frac{13\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos^2 x + \sqrt{2}\,|\cos x| \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

Ответ: $x = \frac{9\pi}{4} + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Задача 5.

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

Ответ: $1 : 1$

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2, если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

Ответ: 4

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $CD_1 : CO_1$, если известно, что $LD_2 = O_2D_2$.

Ответ: $1 : 1$

Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A. Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите LO_1, если известно, что $CO_2 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

Ответ: 1

Задача 6.

Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \arccos(1/2) = \pi/3 \\ y = \arcsin(1/2) = \pi/6 \end{cases}$

Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y^{3/2} = 54 \\ x^{2/3} + y = 18 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases}$

Найдите все x, y на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^3 x} + \dfrac{1}{\cos^3 y} = 54 \\ \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 16 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \arcsin(1/3) \\ y = \arccos(1/3) \end{cases}$

Задача 7.

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Ответ: $\sqrt{2}/3$

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Ответ: $\sqrt{7}/6$

В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Ответ: $\sqrt{3}/2$

В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

Ответ: $\sqrt{3}/4$

Задача 8.

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-5x^2 - 17y^2 - 18xy + 12} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Ответ: $[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right)$.

Решение: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right) = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}\left(8+4\sqrt{3}\right) = 4(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4$

Ответ: 4

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2-6x+17)$.

Решение: $\log_{1/2}(x^2-6x+17) = -\log_2((x-3)^2+8) \leqslant -\log_2 8 = -3$

Ответ: -3

3. Найдите все положительные x, удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

Решение: Для положительных x

$$x^{3x+7} > x^{12} \iff x^{3x-5} > 1 \iff (3x-5)\ln x > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ (3x-5)(x-1) > 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0,1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$

4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$.

Решение: Поскольку $\cos x = 0$ не дает решения, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1/2} + \frac{1/2}{\cos x}\right).$$

По неравенству между средними правая часть по модулю не меньше 1 и равна 1 тогда и только тогда, когда $\cos x = 1/2$. Получаем систему

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = \pm 1 \\ \cos x = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11\pi}{15} + \frac{4\pi k}{5}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2\pi + 4\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{3} + 4\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

Решение: Отрезки CB_1, CA и CB_2 равны как отрезки касательных. Следовательно, $\triangle O_1CB_1 = \triangle O_1CA$, $\triangle O_2CB_2 = \triangle O_2CA$. Значит, CO_1 и CO_2 суть биссектрисы углов ACB_1 и ACB_2 и, таким образом образуют прямой угол. Стало быть, $\angle LCO_1 = 90^\circ - \angle LCO_2 = 90^\circ - \angle LCA = \angle CLA$, то есть

$$\angle D_1LO_1 = \angle LCO_1.$$

Пользуясь этим соотношением, получаем:

$$CD_1 = CO_1 \iff \angle CD_1O_1 = \angle CO_1D_1 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \angle D_1LO_1 = \angle LCO_1 = \angle CD_1O_1 + \angle CO_1D_1 = 2\angle CO_1D_1 = \angle D_1O_1L \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow D_1L = D_1O_1 \Longleftrightarrow LD_2 = O_2D_2.$$

Последняя импликация следует из подобия треугольников O_1D_1L и D_2O_2L.

Ответ: $1:1$

6. Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

Решение: Положим $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 16 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$$

Еще раз сделаем замену: положим $u = a + b$, $v = ab$. Тогда $u > 0$, $v > 0$,

$$a^2 + b^2 = u^2 - 2v, \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = u(u^2 - 3v).$$

Получаем

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) = 16 \\ u^2 - 2v = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u^3 - 24u + 32 = 0 \\ v = \frac{u^2}{2} - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (u-4)(u^2 + 4u - 8) = 0 \\ v = \frac{u^2}{2} - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (u-4)(2v + 4u) = 0 \\ v = \frac{u^2}{2} - 4 \end{cases},$$

откуда в силу положительности u, v следует, что

$$\begin{cases} u = 4 \\ v = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 4$, $y = 8$.

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Решение: Пусть ABC и $A'B'C'$ — основания призмы, AA', BB', CC' — ее боковые ребра. Поскольку все пары скрещивающихся диагоналей боковых граней переходят друг в друга при помощи поворотов относительно оси симметрии призмы и симметрий относительно вертикальных плоскостей симметрии, не ограничивая общности, можно взять диагонали AB' и BC'.

Расстояние между прямыми AB' и BC' достигается на отрезке XY с концами на этих прямых, перпендикулярном им обеим. Проведем через точку B' прямую, параллельную BC'. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой CB через D. Отрезок XY перпендикулярен прямой BC' и плоскости $AB'D$. Следовательно, его длина равна расстоянию от точки B до плоскости $AB'D$. Остается найти это расстояние.

Обозначим длину стороны основания через a, а высоту призмы через h. Рассмотрим три попарно ортогональные прямые — BD, BB' и ℓ, тоже проходящую через точку B. В соответствующей этим прямым системе координат плоскость $AB'D$ задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} + \frac{z\sqrt{3}}{a} = 1.$$

Стало быть, нормаль к этой плоскости задается вектором

$$\frac{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{h}, \frac{\sqrt{3}}{a}\right)}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}.$$

Умножая его скалярно на вектор $(a, 0, 0)$, получаем, что расстояние от B до плоскости $AB'D$ равно

$$\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}.$$

Для $a=1$ и $h=\sqrt{2}$ получаем $\sqrt{2}/3$.

Ответ: $\sqrt{2}/3$

8. Пусть

$$f(x,y) = \sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y,$$
$$g(x,y) = -\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6}+y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Решение: Искомое множество совпадает множеством значений z, при которых разрешима относительно x, y совокупность

$$\left[\begin{array}{l} z-y=\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6} \\ z-y=-\sqrt{-6x^2-14y^2-18xy+6} \end{array}\right. .$$

Эта совокупность равносильна уравнению

$$(z-y)^2 = -6x^2-14y^2-18xy+6.$$

То есть уравнению

$$6x^2+18xy+(z-y)^2+14y^2+6=0.$$

Разрешимость этого уравнения относительно x при фиксированных z, y равносильна неотрицательности дискриминанта. Следовательно, исходное искомое множество совпадает с множеством тех z, при которых относительно y разрешимо неравенство

$$(9y)^2-6((z-y)^2+14y^2+6) \geqslant 0.$$

Перепишем это неравенство следующим образом:

$$3y^2-4yz+2z^2-12 \leqslant 0.$$

Оно разрешимо тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен. То есть, когда

$$z^2 \leqslant 18.$$

Стало быть, искомое множество — отрезок $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

Ответ: $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$