

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$.

3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{-5x-3} < x^{-7}$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sqrt{2} |\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 в точке B и пересекает в точке C общую касательную этих окружностей, проходящую через точку A . Прямая, делящая угол ACO_1 пополам, пересекает прямые O_1O_2 и BO_1 в точках L и D соответственно. Найдите CO_2 , если известно, что $LO_1 = 2$, а прямые CO_2 и DO_2 перпендикулярны.

6. Найдите все x, y на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{7}$. Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрепляющей с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.