

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$.

2. Найдите максимальное значение функции $\log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$.

3. Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству $x^{3x+7} > x^{12}$.

4. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos x \sin^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{1}{4} = 0$.

5. Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2 . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A , пересекает отрезок B_1B_2 в точке C . Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1 , O_1O_2 , O_2B_2 в точках D_1 , L , D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

6. Найдите все положительные x, y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.